ეკვივარიანტული არაკომუტაციური სივრცეების უნივერსალური ჰომოლოგიური ინვარიანტი

გიორგი ნადარეიშვილი

თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის კონფერენცია, მიძღვნილი გიორგი მანჯავიძის 100 და ნოდარ ბერიკაშვილის 95 წლისთავისადმი

თბილისი, 19-23 თებერვალი, 2024

C^*-ალგებრები

C^*-ალგებრა არის ბანახის ალგებრა $\mathbb{C}$-ზე, სადაც მოცემულია ასახვა $x \mapsto x^*$, ისე რომ

1. $x \mapsto x^*$ არის ალგებრის სტრუქტურის შემნახველი ინვოლუცია (შეუღლება);
2. $||xx^*|| = ||x||^2$.

რამოდენიმე მაგალითი

- $C(X, \mathbb{C})$, უწყვეტი ფუნქციები X კომპაქტურ ჰაუსდორფის სივრცეზე;
- $C_0(X, \mathbb{C})$ ლოკალურად კომპაქტური X-ისთვის;
- $B(\mathcal{H})$, შემოსაზღვრული წრფივი ოპერატორები $\mathcal{H}$ კომპლექსურ ჰილბერტის სივრცეზე;
  - $B(\mathcal{H})$-ს ქვე-C^*-ალგებრა, მატრიცების ალგებრა $M_n(\mathbb{C})$;
- ფონ ნოიმანის ალგებრები, ჯგუფის/ჯგუფოიდის C^*-ალგებრა, გრაფების C^*-ალგებრები. . .

არაკომუტაციური ტოპოლოგია

$$\mathfrak{LCHau}^{\mathrm{op}} \xrightarrow[C_0]{\simeq} \mathfrak{ComC}^*\text{-}\mathfrak{alg}$$

- ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცეების კატეგორია კომუტაციური C^*-ალგებრების კატეგორიის ეკვივალენტურია (დუალურად).

ტოპოლოგია, $C_0(X)$		ალგებრა, C^*-ალგებრა A
proper ასახვა, ჰომეომორფიზმი		მორფიზმი, იზომორფიზმი
ზომა, კომპაქტური	$\longleftrightarrow$	დადებითი ფუნქციონალი, ერთეულოვანი
ღია სიმრავლე, ჩაკეტილი სიმრავლე		იდეალი, ფაქტორ-ალგებრა
ბმულობა, 2-ად თვლადი		უპროექციო, სეპარაბელური
ტოპოლოგიური K-თეორია		ოპერატორთა K-თეორია

- ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის X სივრცის ნებისმიერი თვისება, შესაძლებელია ფუნქციათა ალგებრა $C_0(X)$-ის ენაზე გადაითარგმნოს; ხშირად ეს თვისება ნებისმიერ არაკომუტაციურ C^*-ალგებრისთვისაც ზოგადდება.

KK-თეორია

- როგორც ტოპოლოგიურ სივრცეებს, C^*-ალგებრებსაც ჰომოლოგიური ინვარიანტებით ვსწავლობთ.
- C^*-ალგებრებზე, ნებისმიერი „საინტერესო“ ჰომოლოგიის თეორიის ფუნქტორი H კასპაროვის კატეგორიის $\mathfrak{KK}$ გავლით ფაქტორდება.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}^*\text{-}\mathfrak{alg} \arrow[rr, "H"] \arrow[dr] & & \mathfrak{A} \\ & \mathfrak{KK} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- ამიტომ კატეგორია $\mathfrak{KK}$-ს შესწავლა ფუნდამენტურია არაკომუტაციურ ტოპოლოგიაში.

განსაზღვრება

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{KK}) := \{\text{სეპარაბელური } C^*\text{-ალგებრები } A, B, \dots\}; \quad \mathrm{Mor}_{\mathfrak{KK}}(A, B) := \mathrm{KK}(A, B).$$

როგორ განიმარტება $\mathrm{KK}(A, B)$?

KK-თეორია როგორც განზოგადებული K-თეორია

ატია-სიგალის კლასიკური სივრცეების ვექტორული კონების K-ჰომოლოგიის განზოგადებით, გაიგივება

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{KK}}(\mathbb{C}, B) = \mathrm{KK}(\mathbb{C}, A) \cong \mathrm{K}(A)$$

KK-თეორიას K-თეორიის ბუნებრივ განზოგადებად წარმოადგენს.

ამიტომ, ცხადია, KK-თეორიის K-თეორიის გამოთვლაზე დაყვანა გვსურს.

რაღაც შემთხვევებში ეს შესაძლებელია.

უნივერსალური კოეფიციენტების თეორემა (როსენბერგ–სჩოჩეტი 87)

დავუშვათ A მბად კლასში მდებარე სეპარაბელური C^*-ალგებრაა. მაშინ ნებისმიერი $B \in \mathrm{KK}$-სთვის, არსებობს აბელური ჯგუფების შემდეგი მოკლე ზუსტი მიმდევრობა:

$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{Ab}}(\mathrm{K}(\Sigma A), \mathrm{K}(B)) \rightarrowtail \mathrm{KK}(A, B) \twoheadrightarrow \mathfrak{Ab}(\mathrm{K}(A), \mathrm{K}(B)).$$

$\mathfrak{KK}$ ტრაინგულირებადი კატეგორიაა.

- სტაბილური კატეგორია სუსტი ბირთვებით/კობირთვებით.

აბელურ კატეგორიაში, გვაქვს მოკლე ზუსტი მიმდევრობები

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[dl, "\exists!"] & 0 \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{K}\mathfrak{K}$ ტრაინგულირებადი კატეგორიაა.

- სტაბილური კატეგორია სუსტი ბირთვებით/კობირთვებით.

ტრიანგულირებად კატეგორიაში, გვაქვს ე.წ. სამკუთხედები

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[dl, "\exists"] & \Sigma A \\
& X & &
\end{tikzcd}$$

ჰომოლოგიური ალგებრა

მიზანი

ავაგოთ ჰომოლოგიური ალგებრა ტრიანგულირებად კატეგორიაზე $\mathfrak{T}$.

გზა

სიზუსტე $\Longrightarrow$ პროექციული ობიექტი $\Longrightarrow$ პროექციული რეზოლვენტა $\Longrightarrow$ წარმოებული ფუნქტორები $\Longrightarrow \cdots$

ცხადი ჰომოლოგიური ალგებრის სტრუქტურა $\mathfrak{T}$-ზე ტრივიალურია.

არა-აბელური $\Longrightarrow$ საჭიროა დამატებითი სტრუქტურა ჰომოლოგიური ალგებრისთვის.

ფარდობითი სიზუსტე

- ამოვირჩიოთ ფუნქტორი
$$H\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}.$$
- სამკუთხედ $A \to B \to C \to \Sigma A$ ვუწოდოთ H-ზუსტი თუ
$$0 \to H(A) \to H(B) \to H(C) \to 0$$
მოკლე ზუსტი მიმდევრობაა.
- ჰომოლოგიური ფუნქტორი $F\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{B}$ H-ზუსტია თუ ის H-ზუსტი სამკუთხედები მოკლე ზუსტ მიმდევრობებში გადაყავს.

უნივერსალური მიახლოება

H-ზუსტი სტაბილური ჰომოლოგიური ფუნქტორს $U\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}_U$ ეწოდება უნივერსალური თუ ნებისმიერი სხვა H-ზუსტი ჰომოლოგიური ფუნქტორი G ერთადერთი ზუსტი $\overline{G}$ ფუნქტორის გავლით ფაქტორდება:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T} \arrow[rr, "U"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathfrak{A}_U \arrow[dl, "\overline{G}"] \\
& \mathfrak{B} &
\end{tikzcd}$$

„ნამდვილი“ ჰომოლოგიური ალგებრა $\mathfrak{A}_U$ და H-ფარდობითი ჰომოლოგიური ალგებრა $\mathfrak{T}$-ზე U-ს გამოყენებით იგივდება.

ამიტომ, H-ჰომოლოგიური გამოთვლები $\mathfrak{T}$-ში $\mathfrak{A}_U$-ზე კლასიკურ ჰომოლოგიურ გამოთვლებზე დაიყვანება.

გამოყენება

- სხვადასხვა $\mathfrak{KK}$ კატეგორიები $\implies$ სხვადასხვა რელევანტური ჰომოლოგიური მიახლოებები.
- ბევრი „ჰომოლოგიური ბუნების“ გამოთვლა შეიძლება $\mathfrak{A}_U$-ში ჩატარდეს.

არაუმეტეს თვლადი ქვეკატეგორიისთვის $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}$ იონედას ფუნქტორი

$$\mathfrak{T} \xrightarrow{Y} \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})_{\text{countable}} = \mathrm{Mod}(\mathcal{C}), \qquad A \mapsto (\mathfrak{T}(C, A))_{c \in \mathcal{C}}$$

არის უნივერსალური Y-ზუსტი ჰომოლოგიური ფუნქტორი.

მიზანი

სწორად ამოვარჩიოთ და გამოვთვალოთ ქვეკატეგორია $\mathcal{C}$.

გამოყენების მაგალითი

განვიხილოთ კლაინის 4-ჯგუფის

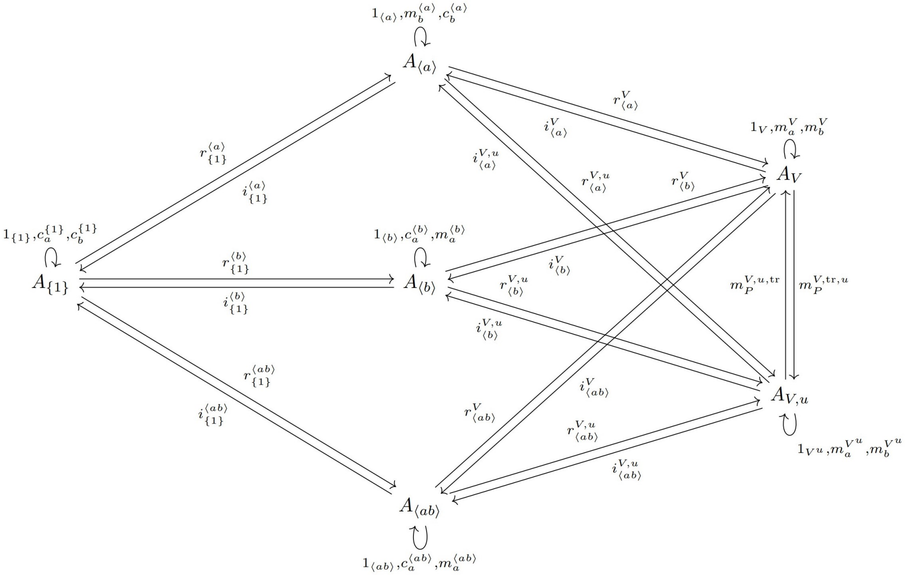
$$V = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 = \{a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1\}$$

ავტომორფიზმებით მოქმედებები C^*-ალგებრებზე.

კლასიკური შემთხვევის ანალოგიურად, გვაქვს უნივერსალურ კასპაროვის კატეგორია $\mathfrak{KK}^V$.

რელევანტური ქვეკატეგორია $\mathcal{C}$, V-ს ქვეჯგუფების ყველა პროექციული წარმოდგენებითაა ინდექსირებული.

მაიერი-ნ. 2024



მაიერი–ნ. 2024

აქ $\mathcal{C}$ მეკისეულ მიმართებებს აკმაყოფილებს.

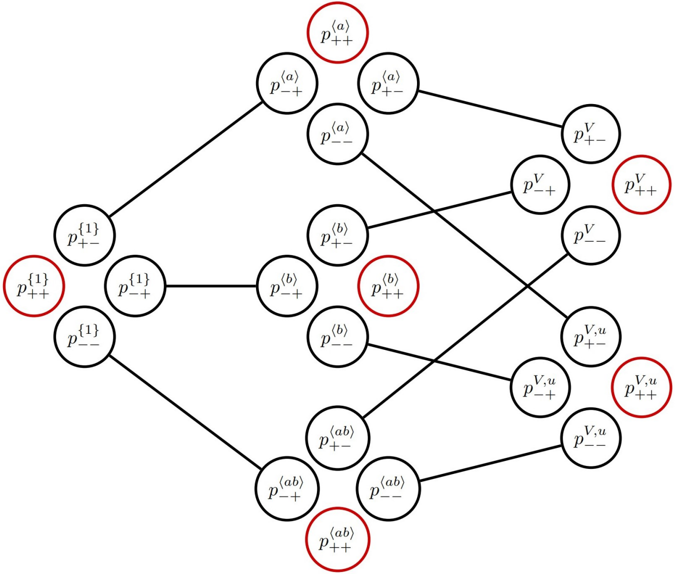
თუ დამატებითად განვიხილავთ, 2-ზე ლოკალიზებულ კატეგორიას $\mathfrak{KK}^V_{1/2}$

განსაზღვრება

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{KK}^V_{1/2}) := \{\text{სეპარაბელური } C^*\text{-ალგებრები } A, B, \ldots\};$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{KK}^V_{1/2}}(A, B) := \mathrm{KK}(A, B)^V \otimes \mathbb{Z}[1/2].$$

მაშინ, ლოკალიზებული $\mathcal{C} \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ მიიღებს შემდეგ სახეს:

მეიერი–ნ. 2024



მაიერი–ნ. 2024

$\mathcal{C} \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ მატრიცათა რგოლების პირდაპირი ნამრავლია, ამიტომ მისი ჰომოლოგიური განზომილება ერთის ტოლია. შესაბამისად ჭეშმარიტია:

უნივერსალური კოეფიციენტების თეორემა

დავუშვათ A და B 2-ზე გაყოფადი V-C^*-ალგებრებია. დავუშვათ ასევე A პირველი ტიპის ალგებრაა. მაშინ გვაქვს შემდეგი $\mathbb{Z}/2$-გრადუირებული აბელური ჯგუფების მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}^V_{1/2}}(Y_{*-1}(A), Y_*(B)) \to \mathrm{KK}^V_*(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^V_{1/2}}(Y_*(A), Y_*(B)) \to 0.$$

დიდი მადლობა!